MPSI 1 - DS 6 - 09/03/2022

Consignes générales :

- L'ordre est indifférent, mais on séparera clairement les exercices ;
- il est conseillé de tous les aborder (difficulté progressive dans un exercice).
- Toute question, même qualitative, appelle une réponse argumentée.
- La qualité de la rédaction (*français* et *écriture mathématique*) sera notée.
- La qualité de la présentation également : soin, aération, $\boxed{\text{résultats encadrés}}$.
- Une application numérique sans unité explicite et appropriée ne sera pas prise en compte.
- Pour le nombre de chiffres significatifs à conserver pour le résultat final, on s'aligne sur la donnée la moins précise, avec au moins 2 chiffres significatifs (sauf indication contraire).

1- MOMENT CINETIQUE

On se place en référentiel terrestre galiléen, muni d'un repère cartésien $Oxyz$. Un point matériel de masse m glisse sans frottement sur le plan Oxy horizontal ; il est attaché à un fil tendu, inextensible, dont l'autre extrémité est fixée en O à l'axe vertical Oz.

1. Le mobile étant initialement en MCU de rayon R et vitesse angulaire ω, exprimer son énergie cinétique et son moment cinétique calculé en O.
2. Un petit moteur enroule le fil de sorte que sa longueur vaut $r(t) = R(1 - \alpha t)$ à partir de $t > 0$. Montrer que le moment cinétique est constant, en déduire $\dot{\theta}(t)$ en coordonnées polaires.
3. Déterminer complètement la loi $\theta(t)$; quelle est la nature de la trajectoire ?
4. Exprimer la tension du fil en fonction du temps. Commenter.

2- FORCES ELECTROMAGNETIQUES

On se place en référentiel terrestre galiléen, muni d'un repère cartésien $Oxyz$.

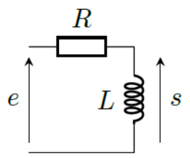
A- Un électron de charge $-e$ et de masse m passe avec la vitesse $V_0\,\vec{u}_x$ $(V_0 > 0)$ à travers une grille métallique située à l'abscisse $x = -D$ $(D > 0)$, assimilable à un plan perpendiculaire à Ox et porté au potentiel $U > 0$ par rapport au plan Oyz porté au potentiel nul.

1. Comment s'exprime la force électrostatique subie par la particule entre les deux plans ?
2. Décrire qualitativement le mouvement de l'électron.
3. À quelle condition l'électron atteindra-t-il le plan Oyz (méthode au choix) ?
4. Que se passera-t-il (qualitativement) si cette condition n'est pas satisfaite ?

B- Une particule de charge q et de masse m passe en O à $t = 0$, avec une vitesse très faible (prise nulle dans la suite), et subit les forces dues aux deux champs électrique $\vec{E} = E\vec{u}_y$ et magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$, uniformes et constants. Les grandeurs précédentes sont toutes à valeurs positives.

1. Établir le système d'équations différentielles vérifiées par les coordonnées de la particule, puis déterminer complètement $x(t)$ et $y(t)$. On posera $\omega = {}^{qB}\!/_{m}$.
2. Calculer et interpréter les moyennes $< \dot{x}(t) >$ et $< \dot{y}(t) >$.
3. Représenter la trajectoire pour $0 \leq \omega t \leq 5\pi$.

3- FILTRE DU PREMIER ORDRE



On considère le circuit ci-contre avec $R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et $L = 10\,\mathrm{mH}$.

1 - Quel type de filtre ce circuit permet-il de réaliser ?

2 - Déterminer sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme

$$\underline{H} = H_0 \frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}.$$

3 - Déterminer les pentes des asymptotes en gain dans les limites haute et basse fréquence, ainsi que leur ordonnée « à l'origine » en $x = 1$. Construire le diagramme de Bode asymptotique en gain sur la figure 1 et en déduire l'allure du diagramme réel.

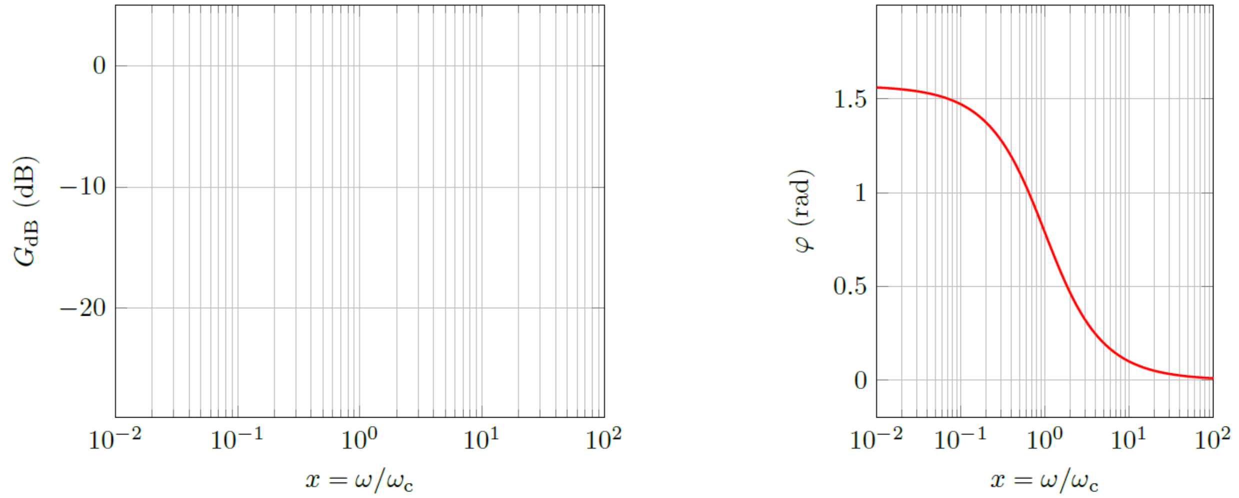
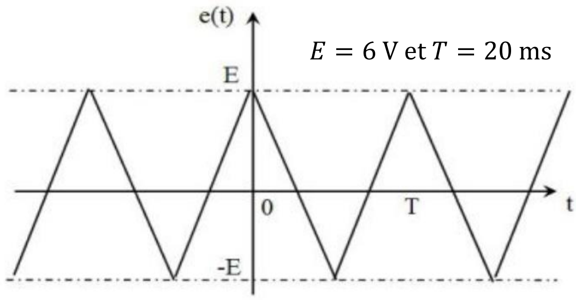


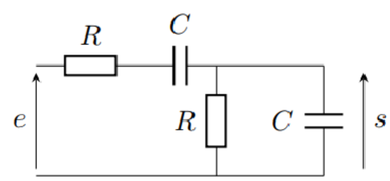
Figure 1 – **Diagramme de Bode du filtre RL.**

4 - La tension e s'écrit sous la forme d'une somme de trois harmoniques de même amplitude, de même phase initiale, et de fréquences respectives $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$, $f_2 = 1\,\mathrm{kHz}$ et $f_3 = 100\,\mathrm{kHz}$. Donner la forme du signal d'entrée e puis du signal de sortie s.

5 – Justifier que ce filtre puisse être qualifié de « dérivateur » si $\omega \ll \omega_c$. En déduire le graphe de la tension de sortie pour la tension d'entrée triangulaire représentée ci-contre.



4- FILTRE DU DEUXIEME ORDRE



On s'intéresse au filtre de Wien représenté ci-contre.

1 - Par analyse des comportements asymptotiques, déterminer le type de filtre.

2 - Déterminer la fonction de transfert H du filtre.

3 - On pose $\omega_0 = 1/RC$ et $x = \omega/\omega_0$. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$, en précisant H_0 et Q.

4 - Calculer simplement le gain maximal du filtre, exprimer sa valeur de dB, et calculer le déphasage correspondant.

5 - Représenter le diagramme de Bode asymptotique du filtre et en déduire qualitativement le tracé réel.

6 - Calculer la pulsation propre ω_0 pour $R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 500\,\mathrm{nF}$. Donner le signal de sortie du filtre si le signal d'entrée est

$$e(t) = E_0 + E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos(10\,\omega t) + E_0 \cos(100\,\omega t)$$

avec $E_0 = 10\,\mathrm{V}$ et $\omega = 200\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

FILTRE DU PREMIER ORDRE - *corrigé*

1 Analyse asymptotique par équivalence :

- à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil, donc $\underline{S} = 0$;
- à très haute fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, donc le courant dans le filtre est nul et on déduit de la loi des mailles $s = e$.

Conclusion : le filtre est a priori **un filtre passe-haut.**

2 Utilisons un pont diviseur de tension en représentation complexe,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R + \mathrm{j}L\omega} = \frac{\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega}{1 + \mathrm{j}\frac{L}{R}\omega} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{H} = H_0 \frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} H_0 = 1 \\ \omega_c = R/L \end{cases}}$$

3 Simplifions la fonction de transfert dans la limite très basse fréquence $\omega \ll \omega_c$,

$$\underline{H} \sim \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1} \sim j\frac{\omega}{\omega_c} \qquad \text{donc} \qquad |\underline{H}| = \frac{\omega}{\omega_c}$$

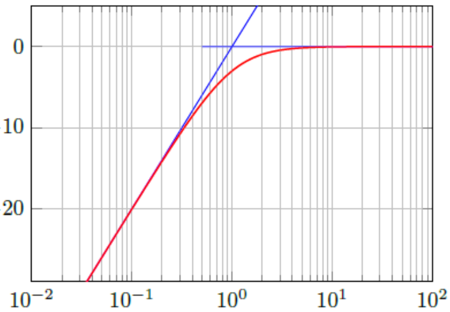
Ainsi,

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log x$$

Comme l'axe des abscisses d'un diagramme de Bode est une échelle logarithmique (en d'autres termes l'abscisse est $\log x$), on en déduit directement que **la pente de l'asymptote à basse fréquence est de pente +20 dB/décade** et **qu'elle passe par le point $G_{\mathrm{dB}} = 0$ en $x = 1$.**

De même dans la limite très haute fréquence $\omega \gg \omega_c$,

$$\underline{H} \sim \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c}}{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c}} = 1 \,. \qquad \text{d'où} \qquad G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20 \log 1 = 0 \,.$$



L'asymptote haute fréquence est donc **une asymptote horizontale.**

4 Comme les trois harmoniques sont de même amplitude et en phase

$$\boxed{e(t) = E_0 \left[\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi f_3 t)\right]} \,.$$

D'après les valeurs numériques données, la pulsation de coupure du filtre vaut

$$\omega_c = \frac{R}{L} = 1{,}0 \cdot 10^5 \,\mathrm{rad \cdot s^{-1}} \qquad \text{soit} \qquad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 16\,\mathrm{kHz}\,.$$

Comme $x_1 = f_1/f_c = 6 \cdot 10^{-3}$, la composante associée est très atténuée : le gain n'est même pas représenté sur le diagramme donné. On peut donc négliger sa contribution au signal de sortie. De même, la contribution de fréquence f_2 (soit $x_2 = 6 \cdot 10^{-2}$) est atténuée d'environ 22 dB, ce qui correspond à un facteur multiplicatif 1/12. Elle est de plus déphasée d'environ 1,5 rad. Enfin la contribution de fréquence f_3 (soit $x_3 = 6{,}25$) est associée à un gain à peu près nul, signe qu'elle n'est pas atténuée, mais on peut estimer son déphasage à 0,2 rad. Ainsi,

$$\boxed{s(t) = \frac{E_0}{12} \cos\left(2\pi f_2 t + 1{,}5\right) + E_0 \cos(2\pi f_3 t + 0{,}2)\,.}$$

Exercice 5 : Filtre de Wien [oral CCP]

$\boxed{1}$ Dans la limite très haute fréquence, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc $\underline{S} = 0$. Dans la limite très basse fréquence, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, et ainsi on a également $\underline{S} = 0$. Selon toute vraisemblance, ce filtre est donc **un filtre passe-bande.**

$\boxed{2}$ Notons $\underline{Y}$ l'admittance de l'association R, C parallèle,

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega\,.$$

En utilisant cette admittance équivalente, on reconnaît un pont diviseur de tension, d'où on déduit

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \underline{Z}}$$

Pour l'obtenir directement sous la forme donnée dans l'énoncé, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\underline{Y}$, ce qui donne

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\underline{Y}} = \frac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\left(\dfrac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega\right)} = \frac{1}{1 + 1 + \mathrm{j}RC\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega} + 1}$$

$\boxed{3}$ En réécrivant la fonction de transfert en termes des variables réduites de l'énoncé, on trouve

$$\underline{H} = \frac{1}{3 + \mathrm{j}x + \dfrac{1}{jx}} = \frac{1/3}{1 + \dfrac{\mathrm{j}}{3}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} H_0 = 1/3 \\ Q = 1/3 \end{cases}}$$

$\boxed{4}$ Le gain en amplitude du filtre est défini par

$$G = |\underline{H}| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}\,.$$

Il est maximal lorsque le dénominateur est minimal, c'est-à-dire lorsque le terme entre parenthèses s'annule. Cela correspond à $x = 1$, qui donne **le gain maximal $G_{\mathrm{max}} = 1/3$, soit $G_{\mathrm{dB}} = 20\log(1/3) = -9{,}5\,\mathrm{dB}$.** La fonction de transfert en $x = 1$ est réelle, c'est-à-dire d'argument égal à 0. À la pulsation ω_0, la sortie et l'entrée ne sont donc pas déphasées.

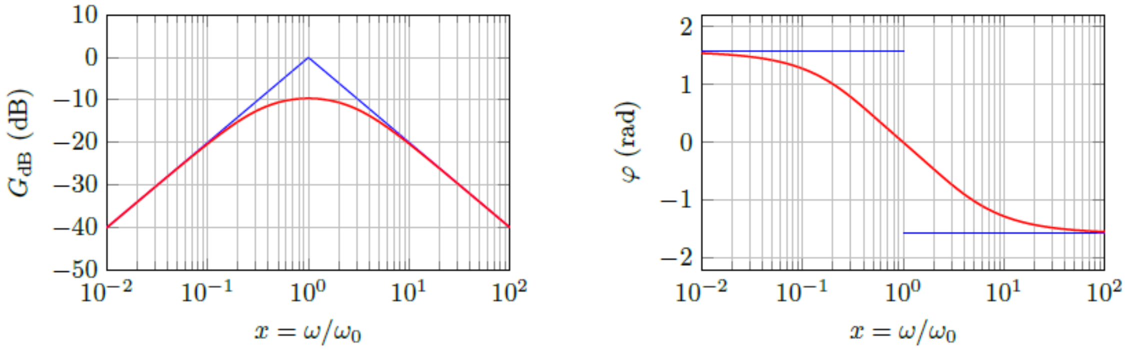
$\boxed{5}$ Dans la limite très basse fréquence, la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{-\mathrm{j}Q/x} = \frac{\mathrm{j}H_0 x}{Q} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 20\log \underline{H} \sim 20\log\dfrac{H_0 x}{Q} = 20\log x \\ \varphi = \arg\underline{H} = \pi/2 \end{cases}$$

De même, dans la limite très haute fréquence, la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{\mathrm{j}Qx} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 20\log \underline{H} \sim 20\log\dfrac{H_0}{Qx} = -20\log x \\ \varphi = \arg\underline{H} = -\pi/2 \end{cases}$$

Ainsi, le diagramme de Bode asymptotique en gain compte **deux asymptotes de pente ±20 dB/décade passant par $G_{dB} = 0$ pour $x = 1$**, alors que le diagramme de Bode en phase compte **deux asymptotes horizontales de hauteur $\pm\pi/2$.** Pour tracer l'allure du diagramme réel, on utilise en plus la question précédente qui indique que la courbe de gain réelle passe par le point $G_{dB} = -9{,}5$ dB en $x = 1$ alors que la courbe de phase réelle y passe par 0. Le diagramme de Bode est représenté figure 8.



$\boxed{6}$ Numériquement, $\omega_0 = 2{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Comme le diagramme de Bode réel n'est pas donné dans l'énoncé, on peut au choix utiliser la fonction de transfert ou raisonner sur le diagramme asymptotique. Étudions le signal de sortie du filtre associé à chaque composante du signal d'entrée,

- ▷ Le terme continu est complètement coupé par le filtre ;
- ▷ Le terme de pulsation $\omega = \omega_0/10$ se trouve une décade en dessous de la pulsation propre : en utilisant le diagramme asymptotique il est atténué de 20 dB, ce qui correspond à un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ 1,2 rad ;
- ▷ Le terme pulsation $10\omega = \omega_0$ est à la pulsation propre du filtre : il n'est pas déphasé mais seulement atténué d'un facteur 1/3 (gain maximal) ;
- ▷ Le terme à la pulsation $100\omega = 10\omega_0$ est une décade au dessus de la pulsation propre : il est atténué comme le premier terme d'un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ −1,2 rad.

Ainsi,
$$s(t) = \frac{E_0}{10}\cos(\omega t - 1{,}2) + \frac{E_0}{3}\cos(10\,\omega t) + \frac{E_0}{10}\cos(100\,\omega t + 1{,}2)$$

MOMENT CINETIQUE - *corrigé*

On se place en référentiel terrestre galiléen.

Vue de dessus :

1) MCU : $\vec v = R\omega\,\vec u_\theta$, $E_c = \frac{1}{2}m(R\omega)^2$, $\vec\sigma_O = mR^2\omega\,\vec e_z$.

2) $\sum\vec F = \vec T + \underbrace{\overrightarrow{\text{Réaction support}} + \overrightarrow{\text{poids}}}_{\text{somme nulle car mvmt horizontal}} = \vec T = -T\,\vec u_r$

TMC : $\dot{\vec\sigma}_O = \overrightarrow{OM}\wedge\sum\vec F = \overrightarrow{OM}\wedge\vec T = \vec 0$ donc $\vec\sigma_O = \overrightarrow{cst} \Rightarrow mr^2\dot\theta = mR^2\omega$

soit $\boxed{r^2\dot\theta = R^2\omega}$.

3) $\dot\theta = \frac{\omega}{(1-\alpha t)^2} \underset{\int dt}{\Rightarrow} \boxed{\theta(t)-\theta_0 = \frac{\omega}{\alpha}\frac{1}{1-\alpha t}}$

Ce calcul, tant que $1-\alpha t>0$, montre une trajectoire en spirale, le rayon r pouvant s'écrire $r(\theta) = R\frac{\omega}{\alpha}\frac{1}{\theta-\theta_0}$, fcn ↓ de θ.

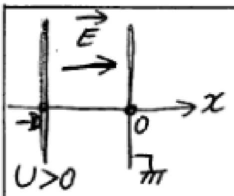
4) RFD : $\vec T = m\vec a = m(\ddot r - r\dot\theta^2)\,\vec u_r = -mR(1-\alpha t)\frac{\omega^2}{(1-\alpha t)^4}\,\vec u_r$

norme $\boxed{T = \frac{mR\omega^2}{(1-\alpha t)^3}}$ est une fcn ↗ de t et $T\to+\infty$ quand $t\to\frac{1}{\alpha}$.

Csqces : le moteur peine de plus en plus, et le fil risque de se rompre.

FORCES ELECTROMAGNETIQUES - *corrigé*

On se place en référentiel terrestre galiléen.



$U>0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{U}{D}\vec{u}_x \Rightarrow \underline{\vec{F} = -e\frac{U}{D}\vec{u}_x}$ s'oppose au mvmt

Force $\vec{F}$ cte, Poids négligé $\Big) \underset{C.I.}{\Rightarrow}$ $\underline{x(t) = -D + v_0 t - \frac{1}{2}\frac{eU}{Dm}t^2}$

Le plan $x=0$ est atteint si $x(t)$ s'annule pour une date positive ; soit à résoudre : $t^2 - 2\frac{mD}{eU}v_0 t + 2\frac{D^2 m}{eU} = 0$ ou $t^2 + bt + c = 0$

$\Delta = b^2 - 8\frac{D^2 m}{eU} < b^2 \Rightarrow$ les deux racines sont positives, la date cherchée sera donc la 1ère, à condition qu'elle existe, ce qui correspond à $\Delta > 0$, lorsque $\boxed{v_0^2 > \frac{2eU}{m}}$

Rq Approche plus efficace = TEC (ou TEM)

$E_{p,\text{élec}} = qV + \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - eU = \frac{1}{2}mv(x)^2 - eV(x)$, avec $V(0)=0$.

La vitesse s'annule en $x=0$ si $\frac{1}{2}mv_0^2 - eU = 0 \Leftrightarrow \boxed{v_0^2 = \frac{2eU}{m}}$

Si v_0 insuffisante, l'e- s'arrête et repart en sens inverse.

RFD en réf. galiléen : $m\vec{a} = q\vec{v}\wedge\vec{B} + q\vec{E}$ d'où $\begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} + qE \\ m\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = \text{cte} \simeq 0 \\ \qquad \Rightarrow z = \text{cte} \simeq 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\E\\0\end{pmatrix}$$

Dans le plan Oxy :

$\omega = \frac{qB}{m} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \omega\dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = -\omega\dot{x} + \frac{q}{m}E = -\omega\dot{x} + \omega\frac{E}{B} & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow \dot{x} = \omega y + c^{te}$, or $v_0 = 0 + c^{te}$ à $t=0$ $\Big) \Rightarrow \underline{\dot{x} = \omega y + v_0}$ $\Rightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = \omega\left(\frac{E}{B} - v_0\right)$ (2b)

On intègre (2b) : $y(t) = \frac{\omega}{\omega^2}\left(\frac{E}{B} - v_0\right) + A\cos\omega t + B\sin\omega t$ avec $y(0)=0$ et $\dot{y}(0)=0$

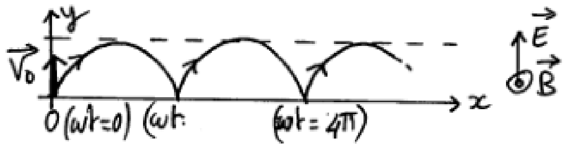
il vient : $\boxed{y(t) = \frac{1}{\omega}\left(\frac{E}{B} - v_0\right)(1-\cos\omega t)}$ $\langle y\rangle = 0$: pas de mvmt moyen seulement oscillation.

alors $\dot{x}(t) = \omega y + v_0$ donne $x(t) = \left(\frac{E}{B} - v_0\right)\left(t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right) + v_0 t + c^{te}$

avec $x(0)=0$ il vient :

$\boxed{x(t) = \frac{E}{B}.t - \frac{1}{\omega}\left(\frac{E}{B} - v_0\right)\sin\omega t}$ $\langle\dot{x}\rangle = \frac{E}{B}$: vitesse de dérive

La trajectoire est une cycloïde :



– = *FIN* = –